215

Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^p$ application.

I] Applications différentiables et dérivées partielles

1] Différentielle

[III.1] [El Am]

Définition 1 : On dit que f est différentiable en $a \in U$ s'il existe $L \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n ; \mathbb{R}^p)$ telle que : $\forall h \in \mathbb{R}^n$,

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|)$$

Proposition 2 : Dans ce cas, L est unique, appelée différentielle de f en a notée $d_a f$ et on appelle différentielle de f : $df : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n ; \mathbb{R}^p)$.

Remarque 3 : La différentiabilité généralise la notion de dérivabilité pour les fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: si $I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en a, on a :

$$f'(a) = d_a f(1)$$

Exemple 4 : Pour $f(x) = \langle x ; x \rangle = \|x\|^2$, $d_x f(h) = 2\langle x ; h \rangle$

Proposition 5 : Toute application linéaire continue $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $d_x f = f$.

Corollaire 6 : Toute application bilinéaire continue $f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^p$ est différentiable sur $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ et $\forall x, y \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$,

$$d_{(x;y)} f(a ; b) = f(x ; b) + f(a ; y)$$

Exemple 7 : Pour $f : \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A ; B) \mapsto AB \end{array}$, on a : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$d_{(A,B)} f(H ; K) = AK + HB$$

2] Opérations algébriques sur les différentielles

[III.2] [El Am]

Proposition 8 : Soit $f, g : U \to \mathbb{R}^p$ différentiables en $a \in U$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Alors : $d_a(\alpha f + g) = \alpha \, d_a f + d_a g$.

Proposition 9 : Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ différentiable en $a \in U$.

Alors : f est continue en a.

Contrexemple 10 : La réciproque est fausse : $x \mapsto \sqrt{|x|}$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas différentiable en 0.

Théorème 11 : Soit $V \subseteq \mathbb{R}^p$ ouvert tel que $f(U) \subseteq V$, soit $g : V \to \mathbb{R}^d$ telle que f différentiable en $a \in U$ et g en $f(a)$.

Alors : $g \circ f$ est différentiable en a et $d_a(g \circ f) = d_{f(a)} g \circ d_a f$

Exemple 12 : Si $f(x) = \|x\|^2$, $g(x) = \|x\|$ et $h(x) = \sqrt{x}$, on a : $g = h \circ f$ et alors $\forall x \neq 0$, $d_x g(h) = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}} d_x f(h) = \dfrac{\langle x | h \rangle}{\|x\|}$

3] Dérivées directionnelles et dérivées partielles

[III.3] [El Am]

Définition 13 : On dit que f admet une dérivée en $a \in U$ suivant le vecteur $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ si l'application $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p \\ t \mapsto f(a+tv) \end{array}$ est dérivable en 0 i.e. si $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \dfrac{f(a+tv) - f(a)}{t}$ existe.

Dans ce cas, on note $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a)$ cette limite.

Exemple 14 : Pour $f(x ; y) = x^2 - y^3$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial v}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial w}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -12$$

Proposition 15 : Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ différentiable en $a \in U$ et $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Alors : $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a)$ existe et $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a) = d_a f(v)$

Contrexemple 16 : La réciproque est fausse.

Pour $f(x ; y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, f admet une dérivée directionnelle en $(0 ; 0)$ suivant tout vecteur non-nul de $\mathbb{R}^2$ mais f n'est pas continue.

Définition 17 : Soit $\mathcal{B} = (e_1 ; \dots ; e_n)$ base de $\mathbb{R}^n$. On dit que f admet une dérivée partielle en $a \in U$ par rapport à la i-ème place si f admet une dérivée en a suivant le vecteur e_i. On note $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial e_i}(a)$.

On considère par la suite $\mathcal{B} = (e_1 ; \dots ; e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$, et $\mathcal{B}' = (e_1' ; \dots ; e_p')$ base de $\mathbb{R}^p$.

III.3 [El Am]

Exemple 18 : Pour $f(x;y)=x^2y-2\sin(xy)$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=2xy-2y\cos(xy) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x;y)=x^2-2x\cos(xy)$$

Proposition 19 : Soit $f:U\to\mathbb{R}^p$ différentiable en $a\in U$.
Alors : $\forall h=h_1e_1+\dots+h_ne_n\in\mathbb{R}^n$, $d_af(h)=\sum_{k=1}^n h_k\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$

Contrexemple 20 : La réciproque est fausse
Soit $f(x;y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x;y)\neq(0;0)\\ 0 & \text{si } x=y=0\end{cases}$. On a bien $d_{(0;0)}f=0$ mais f n'est pas différentiable en $(0;0)$.

4) Jacobien et gradient

III.3 [El Am]

Définition 21 : Si f est différentiable en $a\in U$, on appelle matrice jacobienne de f au point a relativement à $(\mathcal{B};\mathcal{B}')$:

$$\mathrm{Jac}(f)(a)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a)\\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a)\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$$

Si $p=n$, alors on appelle jacobien de f en a : $\det(\mathrm{Jac}(f)(a))$.

Exemple 22 : Pour $f(x;y;z)=(xyz;x^2+y^2+2z^2)$, on a :

$$\mathrm{Jac}(f)(x;y;z)=\begin{pmatrix}yz & xz & xy\\ 2x & 2y & 4z\end{pmatrix}$$

III.4

Théorème 23 : (de représentation de Riesz) Soit $(E;\langle\cdot|\cdot\rangle)$ euclidien
Alors : $\begin{array}{l}E\to E^*\\ x\mapsto\left[\begin{array}{l}E\to\mathbb{K}\\ y\mapsto\langle x|y\rangle\end{array}\right]\end{array}$ est un isomorphisme d'ev réels.
En particulier, $\forall f\in E^*, \exists! x\in E \mid \forall y\in E, f(y)=\langle x|y\rangle$.

Proposition/définition 24 : Soit $f:U\to\mathbb{R}$ différentiable sur U
Alors : $\forall a\in U, \exists!\nabla f(a)\in\mathbb{R}^n \mid \forall h\in\mathbb{R}^n, d_af(h)=\langle\nabla f(a)|h\rangle$.

Proposition 25 : Dans ce cas, $\nabla f(a)=\sum_{k=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)e_k$

Exemple 26 : Pour $f(x;y;z)=x^3-2xy-z^3$, on a :

$$\nabla f(x;y;z)=\begin{pmatrix}3x^2-2y\\ -2x\\ -3z^2\end{pmatrix}$$

III) Différentiabilité d'ordre supérieure

1) Applications de classe $\mathcal{C}^1$

III.5 [El Am]

Définition 27 : On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si f est différentiable sur U et si sa différentielle $df:U\to\mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^p)$ est continue sur U.

Théorème 28 : $f\in\mathcal{C}^1(U)$ ssi les dérivées partielles de f relativement à une base de $\mathbb{R}^n$ existent et sont continues sur U.

III.7 [El Am]

Définition 29 : Soit $V\subseteq\mathbb{R}^p$ ouvert, $f:U\to V$. On dit que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V si f est une bijection de U sur V, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V.

Exemple 30 : Si φ est linéaire et bijective, alors φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Contrexemple 31 : $x\mapsto x^3$ n'est pas un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme car sa réciproque n'est pas différentiable en 0.

Proposition 32 : Soit $V\subseteq\mathbb{R}^p$ ouvert, $f:U\to V$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.
Alors : $\forall a\in U$, d_af est un isomorphisme et $\forall y\in V$,

$$d_yf^{-1}=\frac{1}{d_{f(x)}f} \quad \text{avec } x=f^{-1}(y)$$

[Ro]

Définition 33 : Une application $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ est dite propre si : pour tout $K\subseteq\mathbb{R}^n$ compact, $f^{-1}(K)$ est compact ce qui équivaut à écrire $\|f(x)\|\underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$

Théorème 34 : (de Hadamard-Lévy) Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$.
Alors : f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global sur $\mathbb{R}^n$ ssi f est propre et $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $d_xf\in GL(\mathbb{R}^n)$.

2) Différentielle seconde

IV.1 [El Am]

Définition 35 : Soit $f:U\to\mathbb{R}^p$ deux fois différentiable en $a\in U$. On appelle différentielle seconde de f l'application :

$$d^2f:\begin{array}{l}U\to\mathcal{L}_c(U;\mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^p))\\ x\mapsto d^2_xf\end{array}$$

IV.1 [ElAm]

Proposition 36: Soit E, F, G espaces de Banach.
Alors: il existe un isomorphisme canonique
$$\mathcal{L}_c(E;\mathcal{L}_c(F;G)) \simeq \mathcal{L}_c^2(E\times F;G)$$
avec $\mathcal{L}_c^2(E\times F;G)$ les applications bilinéaires continues $E\times F\to G$.

Théorème 37: (de Schwarz) Soit $f: U\to\mathbb{R}$ deux fois différentiable en $a\in U$
Alors: $\forall i,j\in[\![1;n]\!]$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$

Définition 38: Dans ce cas, on appelle matrice hessienne de f en a:
$$\mathrm{Hess}(f)(a)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & - & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}(a)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & - & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a)\end{pmatrix}$$

Remarque 39: Dans ce cas, $\forall h,k\in\mathbb{R}^n$, $d_a^2 f(h;k)={}^t h\,\mathrm{Hess}(f)(a)\,k$

3] Accroissements finis et formules de Taylor

III.6 [ElAm]

Théorème 40: (des accroissements finis) Soit $U\subseteq\mathbb{R}^n$ ouvert convexe et $f: U\to\mathbb{R}$ différentiable sur U, $a,b\in U^2$, $a\neq b$.
Alors: $\exists c\in]a;b[\mid f(b)-f(a)=d_c f(b-a)$

Théorème 41: (formules de Taylor) Soit $a, h\in\mathbb{R}^n$ tq: $[a;a+h]\subseteq U$
Alors: (1) (avec reste intégral) Si f est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$, alors:
$$f(a+h)=f(a)+\sum_{k=1}^{p}\frac{d_a^k f(h;\dots;h)}{k!}+\int_0^1\frac{(1-t)^p}{p!}d_{a+th}^{p+1}(h;\dots;h)\,dt$$
(2) (Lagrange) Si f est $(p+1)$-fois différentiable sur U, alors:
$$\exists\theta\in]0;1[\mid f(a+h)=f(a)+\sum_{k=1}^{p}\frac{d_a^k f(h;\dots;h)}{k!}+\frac{d_{a+\theta h}^{p+1}(h;\dots;h)}{(p+1)!}$$
(3) (Young) Si f est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ sur U et p fois différentiable en a, alors $\exists V\in\mathcal{V}_0 \mid \exists\varepsilon: V\to\mathbb{R}^p \mid \varepsilon(t)\xrightarrow[t\to 0]{}0$, $\forall h\in V$, $f(a+h)=f(a)+\sum_{k=1}^{p}\frac{d_a^k(h;\dots;h)}{k!}+\varepsilon(h)\|h\|^p$

III] Étude d'extrema

1] Conditions de premier ordre

V.1 [ElAm]

Définition 42: Soit $f: U\to\mathbb{R}$ différentiable en $a\in U$. On dit que f admet un point critique au point a si $d_a f=0$.

Proposition 43: Soit $f: U\to\mathbb{R}$ différentiable en $a\in U$ et admettant un extremum local en a
Alors: $d_a f=0$

V.1 [ElAm]

Contrexemple 44: La réciproque est fausse. $f: x\mapsto x^3$ vérifie $d_0 f=0$ mais 0 n'est pas extremum local de f.

Remarque 45: $\{\text{extrema locaux}\}\subseteq\{\text{points critiques}\}$

2] Conditions du second ordre

V.1 [ElAm]

Proposition 46: Si f admet un minimum (resp. maximum) local en $a\in U$ et f est deux fois différentiable en a.
Alors: $d_a f=0$ et $\forall h\in\mathbb{R}^n$, $d_a^2(h;h)\geq 0$ (resp. $d_a^2(h;h)\leq 0$)

Définition 47: Soit $f: U\to\mathbb{R}$ deux fois différentiable. On dit qu'un point $a\in U$ est non-dégénéré si la forme quadratique hessienne $d_a^2 f(h;h)$ est non-dégénérée i.e. $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\right)\neq 0$.

Théorème 48: Soit $f: U\to\mathbb{R}$ deux fois différentiable tq: $a\in U$ est un point critique de f.
Alors: (1) Si $q=d_a^2 f$ est une forme coercive positive (i.e. $\exists\varepsilon_0>0 \mid q(h)\geq\varepsilon_0\|h\|^2$) alors: f a un minimum local strict en a.
(2) Si $q=d_a^2 f$ est une forme coercive négative (i.e. $\exists\varepsilon_0>0 \mid q(h)\leq-\varepsilon_0\|h\|^2$) alors: f a un maximum local strict en a.

3] Points d'équilibres stables

[Isen]

Lemme 49: Soit $\|.\|$ norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les vp sont de partie réelle strictement négative.
Alors: $\exists\alpha>0 \mid \exists\lambda>0 \mid \forall t\in\mathbb{R}_+$, $\|e^{tA}\|\leq\lambda e^{-\alpha t}$

Théorème 50: (de sortie de tout compact) Soit $I\subseteq\mathbb{R}$ intervalle, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ ouvert connexe, $f: I\times\Omega\to E$ continue, localement lipschitzienne en la deuxième variable. Soit z solution maximale de $y'=f(t,y)$ et J son intervalle de définition.
Alors: si $\sup(J)<\sup(I)$, alors $\forall K\subseteq\Omega$ compact, $\exists T_K\in J \mid \forall t\in[T_K;\sup(J)[$, $z(t)\in\Omega\setminus K$

Théorème 51: (de Liapounov) Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0)=0$ et tq: $d_0 f$ a toutes ses vp de partie réelle <0.
Alors: 0 est point d'équilibre stable du système $\begin{cases}y'=f(y)\\ y(0)=y_0\end{cases}$
i.e. $\forall y_0$ suffisamment proche de 0, la solution maximale y est bien définie sur $[0;+\infty[$ et tend exponentiellement vite vers 0 lorsque $t\to+\infty$.

Références :

[ElAm] Calcul Différentiel - El Amrani

[ZQ] Éléments d'analyse - Zuily

[Isen] L'oral à l'agrégation de mathématiques - Isenmann